

1 Laplaceova transformace

Symbolem L^+ budeme označovat prostor všech funkcí $f \in L^1_{loc}(0, \infty)$ pro které existuje $C \in \mathbb{R}$, že platí $e^{-Ct}f(t) \in L^1(0, \infty)$.

Poznámky a příklady. 1. L^+ je lineární prostor, tedy pro $A, B \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ a $f, g \in L^+$ platí $Af + Bg \in L^+$.

2. Pro $n \in \mathbb{N}$ a $f \in L^+$ platí $t^n f(t) \in L^+$.

Lemma 1 (o definičním oboru Laplaceovy transformace). Pro každou funkci $f \in L^+$ existuje jednoznačně určené $C_f \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, že:

- pro každé $\alpha > C_f$ platí $e^{-(\alpha+\beta i)t}f(t) \in L^1(0, \infty)$,
- pro každé $\alpha < C_f$ platí $e^{-(\alpha+\beta i)t}f(t) \notin L^1(0, \infty)$

Poznámky a příklady. 3. platí $e^{-(C_f+\beta i)t}f(t) \in L^1(0, \infty)$ buď pro všechna $\beta \in \mathbb{R}$, nebo pro žádné $\beta \in \mathbb{R}$.

Definice 2 (Laplaceova transformace). Pro $f \in L^+$ definujeme Laplaceovu transformaci f (zn. $\mathcal{L}(f)$) předpisem

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt,$$

kdykoliv (tedy pro taková $s \in \mathbb{C}$, kdy) má výraz napravo smysl.

Poznámky a příklady. 4. Platí $D_{\mathcal{L}(f)} \supset \{\alpha + \beta i : \alpha > C_f\}$.

5. (linearita $f \mapsto \mathcal{L}(f)$), je-li $A, B \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ a $f, g \in L^+$, potom

$$\mathcal{L}(Af + Bg)(s) = A\mathcal{L}(f)(s) + B\mathcal{L}(g)(s), \quad \Re(s) > \max(C_f, C_g).$$

6. (Laplaceova transformace jako Fourierova transformace) Pro $f \in L^+$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > C_f$ platí

$$\mathcal{L}(f)(\alpha + \beta i) = \mathcal{F}(e^{-\alpha t}f(t))\left(\frac{\beta}{2\pi}\right).$$

7. (asymptotické chování $\mathcal{L}(f)$) Pro $f \in L^+$, $\alpha > C_f$ platí

$$\lim_{\beta \rightarrow \pm\infty} \mathcal{L}(f)(\alpha + \beta i) = 0.$$

Dále platí

$$|\mathcal{L}(f)(\alpha + \beta i)| \leq \|e^{-\alpha t}f(t)\|_1 \rightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow \infty.$$

8. (diferencovatelnost $\mathcal{L}(f)$) Pro $f \in L^+$ je $\mathcal{L}(f)$ holomorfní na $\{\alpha + \beta i : \alpha > C_f\}$.

9. (Laplaceova transformace škálování) Pro $\alpha > 0$, $s > \alpha C_f$ a $f \in L^+$ platí

$$\mathcal{L}(f(\alpha t))(s) = \frac{1}{\alpha} \mathcal{L}(f)\left(\frac{s}{\alpha}\right).$$

10. (Laplaceova transformace posunutí) Pro $\alpha > 0$, $f \in L^+$ a

$$f_\alpha(t) = \begin{cases} 0; & t \leq \alpha, \\ f(t - \alpha), & t > \alpha, \end{cases}$$

platí

$$\mathcal{L}(f_\alpha)(s) = e^{-\alpha s} \mathcal{L}(f)(s).$$

11. Pro $\alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $f \in L^+$ platí

$$\mathcal{L}(e^{\alpha t} f(t))(s) = \mathcal{L}(f)(s - \alpha), \quad \Re(s) > \Re(\alpha) + C_f.$$

12. (Laplaceova transformace derivace) Pokud $f, f' \in L^+$, $f(0+)$ existuje vlastní, potom

$$\mathcal{L}(f')(s) = -f(0+) + s\mathcal{L}(f)(s), \quad \Re(s) > \max(C_f, C_{f'}).$$

Alternativně, pokud $f \in C^1([0, \infty))$ a $f \in L^+$, potom $f' \in L^+$ a platí

$$\mathcal{L}(f')(s) = -f(0) + s\mathcal{L}(f)(s), \quad \Re(s) > C_f,$$

a speciálně, pokud $f(0) = 0$, potom

$$\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s), \quad \Re(s) > C_f.$$

Postup můžeme iterovat pro $f \in C^k([0, \infty))$, např. pro $k = 2$ dostaneme $f', f'' \in L^+$ a

$$\mathcal{L}(f'')(s) = -f'(0) - sf(0) + s^2\mathcal{L}(f)(s), \quad \Re(s) > C_f.$$

13. (derivace $\mathcal{L}(f)$) Pro $f \in L^+$ a $n \in \mathbb{N}$ platí

$$(\mathcal{L}(f))^{(n)}(s) = \mathcal{L}((-t)^n f(t))(s), \quad \Re(s) > C_f.$$

14. (Laplaceova transformace primitivní funkce) Pro $f \in L^+$, $C_f > 0$ a $F(t) =$

$$\int_0^t f(x) dx \text{ platí } F \in L^+, C_F \leq C_f \text{ a}$$

$$\mathcal{L}(F)(s) = \frac{1}{s} \mathcal{L}(f)(s), \quad \Re(s) > C_f.$$

15. (primitivní funkce k $\mathcal{L}(f)$) Pokud $\frac{f(t)}{t} \in L^+$, potom $f \in L^+$ a platí

$$\mathcal{L}\left(-\frac{f(t)}{t}\right) \text{ je primitivní funkcí k } \mathcal{L}(f) \text{ na } \{\alpha + \beta i : \alpha > C_f\}.$$

16. (Laplaceova transformace konvoluce) Uvažme $f, g \in L^+$ rozšířené hodnotou 0 na intervalu $(-\infty, 0]$. Potom $f * g \in L^+$, přičemž platí

$$f * g(t) = \begin{cases} \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

$$\text{a } \mathcal{L}(f * g)(s) = \mathcal{L}(f)(s) \cdot \mathcal{L}(g)(s), \quad \Re(s) > \max(C_f, C_g).$$

17. Pro $\gamma > -1$ platí

$$\mathcal{L}(t^\gamma)(s) = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{s^{\gamma+1}},$$

speciálně pro $n \in \mathbb{N}_0$ a $\alpha \in \mathbb{C}$ platí

$$\mathcal{L}(t^n)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \mathcal{L}(t^n e^{\alpha t})(s) = \frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}.$$

18. (prostota Laplaceovy transformace) Nechť $f \in L^+$ a existuje $\alpha > C_f$, že $\mathcal{L}(f)(\alpha + \beta i) = 0$, $\beta \in \mathbb{R}$. Potom $f = 0$. Podobně, jsou-li $f, g \in L^+$ a existuje $\alpha > C_f, C_g$, že $\mathcal{L}(f-g)(\alpha + \beta i) = 0$, $\beta \in \mathbb{R}$. Potom $f = g$.

19. (vzory racionálních funkcí) Uvažme následující dvě množiny funkcí

$$A = \{t^n e^{\alpha t} : n \in \mathbb{N}_0, \alpha \in \mathbb{C}\},$$

$$B = \left\{ \frac{P}{Q} : P, Q \text{ polynomy, } \deg P < \deg Q \right\}.$$

Nechť $Q \in B$, potom existuje právě jedno $f \in \text{lin } A$, že $\mathcal{L}(f) = P$ na množině $\{\alpha + \beta i : \alpha > C\}$, pro dostatečně velké C . Dále $\mathcal{L}(f) \in B$ pro každé $f \in \text{lin } A$.

20. Uvažme rovnici $y'' + 3ty' - 6y = 2$, $y'(0) = y(0) = 0$. Pomocí pravidel pro Laplaceovu transformaci dostaneme pro $w = \mathcal{L}(y)$ rovnici

$$w' + \left(\frac{3}{s} - \frac{s}{3} \right) w = -\frac{2}{3s},$$

s dodatečnou podmínkou $w(s) \rightarrow 0$, $s \rightarrow \infty$ (nutná podmínka, aby w bylo obrazem nějaké funkce při Laplaceově transformaci). Tato nová úloha má řešení $w(s) = \frac{2}{s^3}$ a tedy $y = t^2$.

1.1 Inverzní Laplaceova transformace

Na začátku jsme pro inverzní Laplaceovu transformaci neformálně odvodili vzoreček

$$\mathcal{L}^{-1}(F)(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} F(s) e^{st} ds,$$

kde integrál napravo je definován jako

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma|_{[-n, n]}} F(s) e^{st} ds,$$

kde $\gamma(u) = \alpha + ui$, $u \in \mathbb{R}$.

Poznámky a příklady. 21. (o bodové rovnosti pro Laplaceovu transformaci)
 Nechť $f \in L^+$ a nechť f je po částech C^1 na každém intervalu $[0, a]$, $a > 0$.
 Potom pto všechna $t \in \mathbb{R}$ a $\alpha > C_f$ platí

$$\frac{1}{2}(f(t+) + f(t-)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \mathcal{L}(f)(s) e^{st} ds,$$

kde dodefinujeme $f = 0$ na $(-\infty, 0]$.

22. (věta o inverzi Laplaceovy transformace) Nechť $F : \mathbb{C} \supset D_F \rightarrow \mathbb{C}$ je holomorfní na množině $M = \{\alpha + \beta i : \alpha > C\}$ pro nějaké $C \in \mathbb{R}$. Nechť navíc existují $A, B \in \mathbb{R}$, že

$$|F(s)| \leq \frac{A}{s^2}, \quad s \in M, |s| > B.$$

Potom existuje $f \in L^+$, že $F = \mathcal{L}(f)$ na M . Navíc platí

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} F(s) e^{st} ds.$$

Navíc platí, že f je spojitá na $\mathbb{R}$.